境界値の満たす関係について (微分方程式と超函数)

片岡, 清臣

数理解析研究所講究録
281巻 1976年 192-199

境界値の満たす関係について

東大 理　片岡清臣

超関数論に於ける非特性境界値問題については、今迄に小松－河合の境界値の定義に始まって、河合－柏原の楕円型境界値問題の理論と、金子の片側双曲型の場合の可解性等の結果がある。しかし双曲型混合問題等に応用するには少し不十分である。そこで本稿では、境界の余次元1，非特性，単独の場合に限って，ある程度一般論的にできる所を解説する。

§1．層 $C_{M+|X}$ の定義

M を n 次元実解析的多様体，N をその余次元1の部分多様体とする。簡単の為 $M = \mathbb{R}^n \ni (x_1, x')$　$N = \{x_1 = 0\}$ とする。

$X = M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n \ni (z_1, z')$，$Y = N^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{n-1}$，$TX = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z; \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j})$

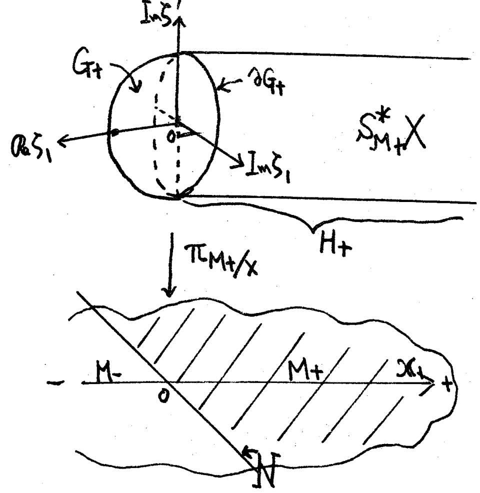
$T^*X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ として pairing を $-\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^n \alpha_j \zeta_j)$ とする。

（従って ζ に対応する“半分”は $\{\alpha;\ -\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^n \alpha_j \zeta_j) \geqq 0\}$ となる。）

$S^*_{M+}X = \{(z, \zeta) \in S^*_M X \mid \mathrm{Re}\, z_1 > 0\} \cup \{(z, \zeta) \in S^*X \mid z \in N,\ \mathrm{Re}\, \zeta' = 0,\ \mathrm{Re}\, \zeta_1 \geqq 0\}$

$G_+ = \{(z, \zeta) \in S^*_N X \mid \mathrm{Re}\, \zeta_1 > 0\}$，$\partial G_+ = \{(z, \zeta) \in S^*_N X \mid \mathrm{Re}\, \zeta = 0\} = S^*_M X \cap S^*_N X$

$H_+ = S^*_M X \cap S^*_{M_+}X = \{(x, i\eta)\in S^*_M X \mid x_1 \geq 0\}$ と定義する。



$\widetilde{M_+X}^* = (X - M_+) \sqcup S^*_{M_+}X \xrightarrow{\pi_{M_+/X}} X$

(M_+ を中心とした X の comonoidal 変換。)

$\widetilde{NX}^* \xrightarrow{\pi_{N/X}} X$

Def $\mathcal{H}^q_{S^*_{M_+}X}(\pi^{-1}_{M_+/X}\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{H}^q_{S^*_NX}(\pi^{-1}_{N/X}\mathcal{O}_X)$ はそれぞれ $q = n$ だけ残るので、

$$C_{M_+|X} \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{H}^n_{S^*_{M_+}X}(\pi^{-1}_{M_+/X}\mathcal{O}_X)\otimes\omega_{M_+/X},$$

$$C_{N|X} \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{H}^n_{S^*_NX}(\pi^{-1}_{N/X}\mathcal{O}_X)\otimes\omega_{N/X}$$

とおくと、これらはすべて座標不変に定義される。

($C_{N|X}$ は河合－柏原によって既に導入されている。)

命題1. $\Gamma_{M_+}\mathcal{B}_M|_N \hookrightarrow \pi_{M_+/X*}C_{M_+|X}|_N$, $C_{M_+|X}|_{\{x_1>0\}} = C_M|_{\{x_1>0\}}$,

$C_{M_+|X}|_{G_+} = C_{N|X}|_{G_+}$, $0\to \Gamma_N\mathcal{B}_M \to \pi_{N/X*}C_{N|X} \to \mathcal{O}_X|_N \to 0$ (完全)

従って問題なのは ∂G_+ 上であるが、次が成立する。

命題2. $C_{N|X}|_{\partial G_+} \xrightarrow{i'} C_{M_+|X}|_{\partial G_+} \xrightarrow{i} \Gamma_{H_+}C_M|_{\partial G_+}$ という自然な写像 i, i' があり、i' は ($S^*_YX\cap\partial G_+$ を除いて)単射ということがわかっている。(i も単射である事が予想されている。)

そして自然に $C_{M_+|X}$, $C_{N|X}$ は $\mathcal{D}_X$－module になっている。

命題3. $C_{N|X}$ (G_+ では $C_{M_+|X}$ も同じだが) は、$S^*_NX - S^*_YX \ni (x'; \zeta_1, i\eta')$ ($\eta'\neq 0$). とするとある対応により (自然ではないが) x' と ζ_1

を変数とする microfunction で，ς_1を正則パラメータとするものと同一視される為，特にς_1について一意接続性が成立する。そしてそれの∂G_+までの一般化として，

$$i(\Gamma_{H_+} C_{M+|X}|_{\partial G_+})=0$$ が成立する。

§2. 小松－河合の境界値

$P(x,D_x)$をm階微分作用素で，Nは非特性とする。

$u(x)$を$\{x_1>0\}$での超関数解（Nに近い所で定義されていればよい。）とすると，$\exists_1 \tilde{u}(x) \in \Gamma_{M_+}(\mathcal{B}_M)$，$\exists_1 f_0(x'),\ldots,f_{m-1}(x') \in \mathcal{B}_N$

s.t. $\tilde{u}|_{x_1>0}=u$，$P\tilde{u}(x)=f_0(x')\delta(x_1)+\cdots+f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$

（$f_0,\ldots,f_{m-1}$を小松－河合の境界値という。）

そこでuを考える代りに$\tilde{u}$，又は$(f_0,\ldots,f_{m-1})$を考える事ができる。ところで$u(x)\longrightarrow(f_0,\ldots,f_{m-1})$の対応は$1:1$であるが$P$が双曲型の場合を除けば一般に onto ではない。そこでこの image を決める事が重要であるが，Cauchy-Kowalevsky の定理より，$\mathcal{A}$での Cauchy 問題の可解性があるので，その image に対する条件は$\mathcal{B}_N^m/\mathcal{A}_N^m \cong \pi_* \mathcal{C}_N^m$に対する条件になる。

そこでこの問題に$\mathcal{C}_{M+|X}$を応用する。まず$\tilde{u}(x)\in\Gamma_{M_+}\mathcal{B}_M|_N$という事から$\tilde{u}$は$\mathcal{C}_{M+|X}$の$S^*_{M+|X}$上の section と同一視できる。また，$F=f_0(x')\delta(x_1)+\cdots+f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$も$\mathcal{C}_{M+|X}$の section，又はより厳密に$\mathcal{C}_{N|X}$の section と同一視できる。よって$P\tilde{u}(x)=F(x)$という方程式は，$\overline{G_+}=G_+\cup\partial G_+$上での$\mathcal{C}_{M+|X}$，$\mathcal{C}_{N|X}$の section 間

の方程式として捉えられる。$\overline{G_+} \setminus \{\sigma_m(p)=0\}$ では $\tilde{u} = P^{-1}F(x)$ として定まり問題はないが，さらに $\tilde{u}$ が $\{\sigma_m(p)=0\} \cap \overline{G_+}$ までも C_{M+1X} の section として拡張される（$P\tilde{u}=F$ を満たしながら）為には，$(f_0 \dots f_{m-1})$ が任意では一般にはだめである。しかし $G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\}$ までに拡張される為の必要十分条件は，完全にわかり，$f_0, \dots, f_{m-1}$ の間の Ψ.D.O 方程式であらわせる。

定理 1．τ^+ ; $\overline{G_+} \setminus S^*_Y X = S^*_N X \cap S^*_{M+}X - S^*_Y X \longrightarrow S^*_N Y = iS^*N$ (proj.) とした時，$\forall (x'_0, i\eta'_0) \in iS^*N$ に対して，$\tau^{+-1}(x'_0, i\eta'_0) \cap G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\}$ が重複度も込めてちょうど m' 個の点からなっているとすると，($0 \leqq m' \leqq m$)，$P\tilde{u}(x) = F(x)$ が $\{\sigma_m(p)=0\} \cap G_+ \cap \tau^{+-1}(x'_0, i\eta'_0)$ で可解である為の必要十分条件は（$\tilde{u}$ は存在すれば命題 3 より一意）P に対して定まるある Ψ.D.O からなる Matrix による $f_{m'}, \dots, f_m$ の（$C_N^{m-m'}|_{(x'_0, i\eta'_0)}$ の germ として）像で $f_0, \dots, f_{m'-1}$ がかけることである。（$C_N^{m'}|_{(x'_0, i\eta'_0)}$ の germ として）

実際この Ψ.D.O を具体的な留数計算で上の symbol から順に求める事ができるが省略する。

次に問題なのは，$\partial G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\}$ 上での可解性であるが，（$S^*_Y X \cap \{\sigma_m(p)=0\} = \phi$），micro local に片側双曲型に当る場合は Cauchy 問題が解けるので $f_0 \dots f_{m-1}$ に対して無条件に $P\tilde{u} = F$ は解ける。（もちろん $\tilde{u} \in C_{M+1X}$ として）

即ち次が成立する。

定理2　(金子)

$\{\sigma_m(P)=0\}\cap\partial G_+\ni(0,x_0';i\eta_0)$ の S^*X における近傍 U が存在して. $\{(z,\zeta)\in U\mid z\in M_+,\ \mathrm{Im}\,\zeta'=0,\ \mathrm{Re}\,\zeta_1>0\}\cap\{\sigma_m(P)=0\}=\phi$ ならば　$P\tilde{u}=F$ は $(0,x_0';i\eta_0)$ で無条件に解ける。$(\tilde{u}\in C_{M+|X})$

(このような $\tilde{u}$ は ∂G_+ 上では $C_{M+|X}$ の germ としてはわからないが少くとも命題3より C_M の元としては一意。)

従って問題なのは、Th 1, 2 とも成立しないような境い目の所であるが，そのような所は回折現象などの起こる所で，境界値の間の関係は一般には micro-local operator をもってしてもかけない事が予想されている。

(注)　楕円型の場合は $\partial G_+\cap\{\sigma_m(P)=0\}=\phi$ であるので定理1だけで完全にわかる。定理2の例は　$P=D_{x_1}^2-x_1D_{x_2}^2$　など.

§3.　非特性境界値問題の超局所的一般化

一般に同次境界値問題とは，境界値の間にいくつかの微分方程式を課して，境界値がそれらの方程式を満たす様な P の $x_1>0$ での解をすべて求める事である。そこで境界値 $(f_0,\dots,f_{m-1})$ $\leftrightarrow$ $F=f_0(x')\delta(x_1)+\cdots+f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$ というように $C_{N|X}$ の section としてとらえ、解 $u(x)\leftrightarrow\tilde{u}(x)\in\pi_{M+/X*}C_{M+|X}$ としてとらえる事によって問題を $S_N^*Y=iS^*N$ 上に超局所化できる。

(S_Y^*X は非特性としているので無視できる。)

つまり　ι^+ ; $\overline{G_+}\setminus S^*_Y X = S^*_{M+}X \cap S^*_N X - S^*_Y X \longrightarrow S^*_N Y = iS^*N$

ι ; $S^*_N X - S^*_Y X \longrightarrow S^*_N Y = iS^*N$

として，$\iota_*\mathcal{P}_X$，$\iota_* C_{N|X}$，$\iota^+_* C_{M+|X}$ という iS^*N 上の sheaf を考える。

Def　$\iota_*\mathcal{P}_X^f \ni P(x, D)$ が non-char. とは　$P \neq 0$ であって．

$\{\sigma(p)=0\} \cap (S^*_N X - S^*_Y X) \xrightarrow{\iota} iS^*N$ が proper map のこと。

特に fiber は有限個で重複度も込めて一定 $= m$ なので．それを P の本質的階数という事にする。non char. のものは明らかに $\iota_*\mathcal{P}_X^f$ の積について閉じている。

Lemma　(小松－河合の境界値の一般化)

$\iota_*\mathcal{P}_X^f \ni P(x, D_x)$; non char. に対して，本質的階数を m とすると．　$\iota_* C_{N|X} = P(\iota_* C_{N|X}) \oplus \sum_{j=0}^{m-1} C_N \cdot \delta^{(j)}(x_1)$

又は　$\iota_* C_{N|X} / P(\iota_* C_{N|X}) \cong C_N^m$

Def　$P \in \iota_*\mathcal{P}_X^f$; non char.　この時　$P(\iota_* C_{N|X}) \subset \mathcal{F} \subset \iota_* C_{N|X}$ なる subsheaf $\mathcal{F}$ が B 型とは．

(B)…　$\mathcal{F}/P(\iota_* C_{N|X}) \hookrightarrow \iota_* C_{N|X}/P(\iota_* C_{N|X}) \cong C_N^m$ として C_N^m の部分層と考えた時．$\exists Q(x', D_{x'})$; $C_N^m \longrightarrow \exists C_N^l$ (Q は有限階 $\mathcal{P}$.D.O. の Matrix) s.t.　$\mathcal{F}/P(\iota_* C_{N|X}) \cong \mathrm{Ker}\, Q$ とかけること。

Def　(φ_M, φ_N) ; $(T^*X, T^*Y) \longrightarrow (T^*X, T^*Y)$ はそれぞれ複素接触変換で

① φ_N ; $S^*_N Y \hookrightarrow S^*_N Y$　，　φ_M ; $S^*_M X \hookrightarrow S^*_M X$

② φ_M ; $S^*_N X - S^*_Y X \hookrightarrow S^*_N X - S^*_Y X$

② $\iota\circ\varphi_M|_{S^*_N X - S^*_Y X} = \varphi_N\circ\iota$

を満たすとし、φ_N が $S^*_N Y \supset U$ の近傍で定義されている時、φ_M は $\iota^{-1}(U)$ の近傍で定義されているとする。

以上のような条件を満たす (φ_M, φ_N) をB型の変換と呼ぶ。

(注) T^*X の複素接触変換 φ_M で $S^*_M X$, $\pi^{-1}(N)$ を不変にするものを与える事とB型の変換を与える事は同値である。

命題　B型の変換 (φ_M, φ_N) に対して，量子化された接触変換 (Φ_M, Φ_N) が存在して、$\iota_*^+ C_{M+|X} \xrightarrow{\Phi_M} \iota_*^+ C_{M+|X}$, $\iota_* C_{N|X} \xrightarrow{\Phi_M} \iota_* C_{N|X}$ $C_N \xrightarrow{\Phi_N} C_N$ という $\iota_*\mathcal{P}_X$-module としての層同型が成立し、Φ_M と Φ_N は $\iota_* C_{N|X}$ の境界値をとる操作（P を１つ決めた時）と両立し、$\mathcal{F}$ がB型ならば $\iota_*\mathcal{F}$ もB型になる。

（これは $C_{M+|X}$ の所でまだ厳密には証明できていないが正しい根拠は十分ある。）

以上の準備の下で境界値問題を一般化すると、

"$P \in \iota_*\mathcal{P}^f_X$; non. char.　$\mathcal{F}$; B型の $\iota_* C_{N|X}$ の部分層を与えて、$\{u \in \iota_*^+ C_{M+|X} \mid Pu \in \mathcal{F}\}$ を求める事。" となる。

実例として回折現象に当る境界値問題は、B型の変換により、generic には、

$P = D_1^2 - (x_1 - x_2) A(x, D')$; A は２階の Ψ.D.O で D_1 を含まず、$\sigma_2(A) = \{\lambda(x, \xi')\}^2$, $\frac{1}{i}\lambda(x, i\eta') > 0$ となる。

参考文献

[1] 柏原-河合. 楕円型境界値問題について. 数理研(1973)

[2] 金子. On Continuation of Regular Solutions of P.D.E. with Real Analytic Coefficients. 数理研講究録 (1975.7)

[3] 小松-河合. Boundary values of hyperfunction solutions of L.P.D.E. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 7(1971)

[4] 森本 超函数の台と特異台(佐藤予想と層 $C_{N|X}$) 数理研講究録, 168 (1972), 28~59.

[5] 佐藤-柏原-河合. Microfunctions and Pseudo Differential equations, Lecture Notes in Math. No. 287, Springer, 1973.